Final MT1E, Automne 2021

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.

Exercice 1 : Suites et fonctions (10 points)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$, et $\forall x \in \mathbb{R}^\star$ $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$

- **a.** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- **b.** Montrer que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$.
- **c.** Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^\star$, et justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- **d.** Achever l'étude des variations de f, dresser son tableau de variations, et préciser l'équation de la tangente à cette courbe à l'origine.

2. Étude d'une suite.

Soit u la suite définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$

- **a.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n \in \left]0, 1\right[$.
- **b.** Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$, calculer $g''(x)$.
  En admettant que $f'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \simeq 0,82$, déduire que g' est strictement négative sur $[0, 1]$.
  Montrer que g réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.
- **c.** En déduire que la suite u est strictement décroissante et converge. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 2 : Nombres complexes (6 points)

1. Soit P un polynôme à coefficients réels, et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow (X - a)|P(X)$$

2. Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients réels. Expliquer pourquoi si le nombre complexe z est racine de P, alors son conjugué $\overline{z}$ aussi.

3. On considère le polynôme $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 10$ où a, b, et c sont des nombres réels. On suppose que 1 et 2 sont des racines de P. On fait l'hypothèse supplémentaire que $\alpha + i$ est racine de P (avec α un réel positif, et $i^2 = -1$). Trouver les valeurs de a, b, c.

4. Décomposer $P(X) = X^5 - 1$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3 : Limites (4 points)

1. Donner la définition mathématique de $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x^3)(e^{3x} - 1)}{\ln(1 + x^4)}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{\ln(1 + x)}, \qquad \lim_{x \to 0} x^3 \exp\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$