Final MT1E, Automne 2022

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.

Exercice 1 : Suites et fonctions (13 points)

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln x\right)$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $g(x) = \ln(x) + 2x - 1$.

- **a.** Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.
- **b.** Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$. Justifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
- **c.** Montrer que $\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{x^2} g(x) f(x)$.
- **d.** En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^\star$.

3. Démontrer que $f(x) - x^2 \underset{+\infty}{\sim} -x\ln x$.

4. Étude d'une suite.
Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n existe, et $u_n > 0$.

5.
- **a.** Étudier le signe de $(x-1)\ln x$ pour $x > 0$.
- **b.** Montrer que $\forall x > 0,\ \frac{f(x)}{x} \geqslant 1$.
- **c.** En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) \geqslant x$, et que l'équation $f(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

6. Étudier les variations de (u_n).

7. **Dans cette question uniquement**, on suppose $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

- **a.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
- **b.** En déduire que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose $u_0 > 1$.

- **a.** Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$.
- **b.** Démontrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

9. **Dans cette question uniquement**, on suppose $0 < u_0 < \frac{1}{2}$. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 2 : Nombres complexes (4 points)

1. Soit P un polynôme à coefficients réels, et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow (X - a)|P(X)$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\cos^3 x$ à l'aide des formules d'Euler.

3. Décomposer $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3 : Limites (3 points)

1. Donner la définition mathématique de $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$.

2. Montrer que si une fonction f admet une limite ℓ en un point a donné, alors cette limite est unique.

3. La fonction $f\colon x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?