MÉDIAN

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée pour l'épreuve. Les calculatrices sont interdites.

UTILISER UNE COPIE PAR EXERCICE

Exercice 1 (7 points)

Les questions **1** et **2** sont indépendantes.

1. **a.** Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 + X$.

b. Donner la forme de la décomposition en éléments simples de $F(X) = \dfrac{1}{(X^4+X)^2}$ (on **ne demande pas** de calculer les coefficients).

2. Soit $G = \dfrac{P}{Q}$ avec $P(X) = X^5 - 9X^3 + 12X^2 - 19X + 25$ et $Q(X) = (X^2+1)(X-2)^2$

a. Montrer que G est irréductible (on pourra regarder les racines de Q).

b. Déterminer la partie entière de G.

c. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, $H(X) = \dfrac{2X^3 - 4X^2 - 7X + 9}{(X-2)^2(X^2+1)}$.

Exercice 2 (7 points)

Soit l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & (\bar{x}, \bar{x}) \end{array}$$

1. Déterminer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$. Généraliser.

2. L'application ci-dessus est-elle injective ? Surjective ?

3. Déterminer $G = f^{-1}((\bar{0}, \bar{0}))$. Démontrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

4. Sur $\mathbb{Z}$, on définit la relation $a \sim b \iff a - b \in G$.
Montrer que cette relation est une relation d'équivalence.

5. Déduire de ce qui précède que l'application

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \bar{x} & \mapsto & (\bar{x}, \bar{x}) \end{array}$$

est **bien définie** et **bijective**.

6. Pourrait-on **de la même façon** construire une application **bijective** de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

TOURNEZ LA PAGE SVP

Exercice 3 (9 points)

Cet exercice comporte une question de cours (question **4.a***). Même si vous ne savez pas y répondre, le résultat démontré dans cette question peut être utilisé dans la suite de l'exercice.*

1. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

2. Soit P un polynôme de degré 2, $P(X) = a + bX + cX^2$. Montrer que P vérifie $P(2) = 4$, $P(3) = 5$, $P(4) = 6$ si et seulement

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + 2b + 4c & = & 4 \\ a + 3b + 9c & = & 5 \\ a + 4b + 16c & = & 6 \end{array} \right.$$

3. Montrer, sans calculs, que ce système admet une solution unique.

4. On souhaite maintenant génénaliser le résultat de la question **1** en montrant que toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$ est inversible :

a. *Une question de cours* :

i. Soit P un polynôme de degré n et a une racine, démontrer que $P(a) = 0 \Rightarrow (X - a) \mid P$ (indication : on écrira la division euclidienne de P par $X - a$ et on calculera le reste de cette division).

ii. Montrer que si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n racines distinctes de P, alors

$$P(X) = (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n) S(X)$$

où S est un polynôme.

iii. En déduire qu'un polynôme de degré n a au plus n racines.

b. On considère α, β, γ trois réels tels que $\alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma$ et $\beta \neq \gamma$. Soient P et Q deux polynômes de degré 2 tels que $\left\{ \begin{array}{rcl} P(\alpha) & = & Q(\alpha) \\ P(\beta) & = & Q(\beta) \\ P(\gamma) & = & Q(\gamma) \end{array} \right.$. Montrer que α, β, γ sont des racines du polynôme $P - Q$.

c. En déduire que $P - Q = 0$ et conclure qu'il existe un unique polynôme de degré 2 tel que $P(\alpha) = y_0, P(\beta) = y_1, P(\gamma) = y_2$ avec y_0, y_1, y_2 trois réels quelconques.

d. Sans faire de calculs déduire des questions précédentes que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$ est inversible.

Correction

Exercice 4

1. **a.** $P(X) = X(X^3+1) = X(X+1)(X^2-X+1)$.

b.

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{1}{(X^4+X)^2} \\ &= \frac{1}{X^2(X+1)^2(X^2-X+1)^2} \\ &= \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{\alpha_1 X+\beta_1}{X^2-X+1} + \frac{\alpha_2 X+\beta_2}{(X^2-X+1)^2}. \end{aligned}$$

2. **a.** *Les racines de Q sont 2 et $\pm i$. Il faut vérifier que ces racines ne sont pas racines de P.*
$P(2) = 2^5 - 9\times 2^3 + 12\times 2^2 - 19\times 2 + 25 = -5 \neq 0$.
$P(i) = i^5 - 9\times i^3 + 12\times i^2 - 19\times i + 25 = 13 - 9i = \overline{P(-i)} \neq 0$.
Donc P et Q n'ont pas de racines en commun, G est irréductible.

b. *On développe $Q(X) = (X^2+1)(X^2-4X+4) = X^4-4X^3+5X^2-4X+4$.*

$$\begin{array}{cccccc|l} X^5 & & -9X^3 & +12X^2 & -19X & +25 & X^4-4x^3+5X^2-4X+4 \\ \cline{7-7} & 4X^4 & -14X^3 & +16X^2 & -23X & +25 & X+4 \\ & & 2X^3 & -4X^2 & -7X & +9 & \end{array}$$

Donc la partie entière de G est $X+4$.

c. *La forme de la décomposition en éléments simples de H sur $\mathbb{C}(X)$ est :*

$$H(X) = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{(X-2)^2} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i}$$

On calcule b en multipliant par $(X-2)^2$, puis en évaluant en $X=2$, $b = \frac{2\times 2^3 - 4\times 2^2 - 7\times 2 + 9}{2^2+1} = -1$.
On calcule c en multipliant par $(X-i)$, puis en évaluant en $X=i$:

$$\begin{aligned} c &= \frac{2i^3-4i^2-7i+9}{(i-2)^2(i+1)} \\ &= \frac{13-9i}{8+6i} \\ &= \frac{(13-9i)(8-6i)}{(8+6i)(8-6i)} \\ &= \frac{50-150i}{100} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

$d = \overline{c} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.
Pour obtenir a, on peut multiplier par X et faire tendre X vers $+\infty$, ce qui donne $2 = a+c+d$. D'où $a = 1$. Finalement,

$$H(X) = \frac{1}{X-2} - \frac{1}{(X-2)^2} + \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i}{X-i} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}{X+i}.$$

Exercice 5

Soit l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & (\bar{x}, \bar{x}) \end{array}$$

1. $f(0) = (\bar{0}, \bar{0}), f(1) = (\bar{1}, \bar{1}), f(2) = (\bar{2}, \bar{0}), f(3) = (\bar{0}, \bar{1}), f(4) = (\bar{1}, \bar{0}), f(5) = (\bar{2}, \bar{1}), f(6) = (\bar{0}, \bar{0}), f(7) = (\bar{1}, \bar{1})$. *On généralise :* $f(a + 6k) = f(a)$ *(*$a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, k \in \mathbb{Z}$*).*
2. *L'application n'est pas injective car* $f(0) = f(6)$.
   L'application est surjective car $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), \}$ *donc tous les éléments de l'ensemble d'arrivée ont un antécédent d'après la question 1).*
3. $f(x) = (\bar{0}, \bar{0}) \Leftrightarrow x = 0 + 6k$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*) d'après la question 1), donc* $G = 6\mathbb{Z}$ *qui est un sous-groupe de* $\mathbb{Z}$ *car*
   - $0 = 6.0 \in 6\mathbb{Z}$,
   - $\forall x = 6k, y = 6k' \in 6\mathbb{Z}, x + y = 6(k + k') \in 6\mathbb{Z}$ *donc* $6\mathbb{Z}$ *est stable pour* $+$,
   - $\forall x = 6k \in 6\mathbb{Z}, -x = 6(-k) \in 6\mathbb{Z}$ *donc tout élément de* $6\mathbb{Z}$ *admet un opposé dans* $6\mathbb{Z}$.
4. *Cette relation est une relation d'équivalence car :*
   - $a - a = 0k \in 6\mathbb{Z}$ *donc* $a \sim a$. *La relation est donc réflexive,*
   - *si* $a - b = 6k \in 6\mathbb{Z}$ *(i.e.* $a \sim b$*) alors* $b - a = 6(-k) \in 6\mathbb{Z}$ *(i.e.* $\Leftrightarrow b \sim a$*). La relation est donc symétrique,*
   - *si* $a - b = 6k \in 6\mathbb{Z}$ *(i.e.* $a \sim b$*) et* $b - c = 6k' \in 6\mathbb{Z}$ *(i.e.* $b \sim c$*) alors* $(a - b) + (b - c) = a - c = 6(k + k') \in 6\mathbb{Z}$. *La relation est donc transitive.*
5. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ *et*
   $g(\bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}),\ g(\bar{1}) = (\bar{1}, \bar{1}),\ g(\bar{2}) = (\bar{2}, \bar{0}),\ g(\bar{3}) = (\bar{0}, \bar{1}),\ g(\bar{4}) = (\bar{1}, \bar{0}),\ g(\bar{5}) = (\bar{2}, \bar{1})$.
   On constate donc que les 6 éléments distincts de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ *ont une image différente dans* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *qui a 6 éléménts également. L'application est donc bijective.*
6. *Non car dans ce cas* $g(\bar{4}) = (\bar{0}, \bar{0}) = g(\bar{0})$ *et dans* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\bar{0} \neq \bar{4}$.

Exercice 6

1. *En appliquant le Pivot de Gauss pour inverser une matrice on obtient* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
2. $$\left\{ \begin{array}{ccc} P(2) & = & 4 \\ P(3) & = & 5 \\ P(4) & = & 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} a + 2b + 4c & = & 4 \\ a + 3b + 9c & = & 5 \\ a + 4b + 16c & = & 6 \end{array} \right.$$
3. *Ce système s'écrit matriciellement sous la forme* $AX = B$ *avec* $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. *La matrice* A *étant inversible d'après* **1**, *le vecteur* X *est déterminé de manière unique par* $X = A^{-1}B$.
4. **a.** *i.* $P(X) = (X - a)Q(X) + R(X)$ *avec* $deg(R) < deg(X - a)$ *donc* $deg(R) \leqslant 0 \Rightarrow R(X) = k \in \mathbb{R}$. *Or* a *est une racine de* P *donc* $0 = P(a) = (a - a)Q(a) + k$. *On en déduit* $k = 0$. *Ainsi* $P(X) = (X - a)Q(X)$, *i.e.* $X - a$ *divise* P.

ii. *x_1 est une racine donc $P(X) = (X - x_1)Q_1(X)$ d'après ce qui précède, mais x_2 est une racine et $x_2 \neq x_1$ donc $0 = P(x_2) = (x_2 - x_1)Q_1(x_2)$. Cette égalité force $Q_1(x_2) = 0$ soit $Q_1(X) = (X - x_2)Q_2(X)$. On a ainsi $P(X) = (X - x_1)(X - x_2)Q_2(X)$. En réitérant pour chaque racine et en utilisant l'hypothèse que tous les x_i sont distincts on obtient $P(X) = (X - x_1)\dots(X - x_n)Q_n(X)$.*

iii. *Supposons que P a au moins $n+1$ racines alors d'après la question précédente $P(X) = (X - x_1)\dots(X - x_{n+1})Q_{n+1}(X)$, un tel polynôme est de degré supérieur à $n+1$. Par la contraposée un polynôme de degré n aura au plus n racines.*

b. $\begin{cases} P(\alpha) &= Q(\alpha) \\ P(\beta) &= Q(\beta) \\ P(\gamma) &= Q(\gamma) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(\alpha) - Q(\alpha) &= 0 \\ P(\beta) - Q(\beta) &= 0 \\ P(\gamma) - Q(\gamma) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (P - Q)(\alpha) &= 0 \\ (P - Q)(\beta) &= 0 \\ (P - Q)(\gamma) &= 0 \end{cases}$ *ce qui montre le résultat.*

c. *$P - Q$ est un polynôme de degré 2 ayant trois racines. D'après la question de cours cela n'est possible que si $P - Q = 0$. S'il existe un polynôme P de degré 2 tel que $P(\alpha) = y_1, P(\beta) = y_2$ et $P(\gamma) = y_3$ alors un tel polynôme est nécessairement unique. En effet si Q est un autre polynôme de degré 2 tel que $Q(\alpha) = y_1, Q(\beta) = y_2$ et $Q(\gamma) = y_3$, alors $P(\alpha) = Q(\alpha), P(\beta) = Q(\beta)$ et $P(\gamma) = Q(\gamma)$ et on en déduit que $P = Q$.*

d. *Pour α, β, γ trois réels deux à deux distincts, il existe un polynôme $P(X) = a + bX + cX^2$ de degré 2 tel que $P(\alpha) = 1$, $P(\beta) = 0$ et $P(\gamma) = 0$. En effet il suffit de considérer $P(X) = \dfrac{1}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}(X - \alpha)(X - \beta)$. D'après la question* **4 c** *un tel polynôme est nécessairement unique. Ainsi le système*

$$\begin{cases} a + b\alpha + c\alpha^2 &= 1 \\ a + b\beta + c\beta^2 &= 0 \\ a + b\gamma + c\gamma^2 &= 0 \end{cases}$$

a une unique solution. Cela prouve que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$ *est inversible.*