Final AAK, Printemps 2021

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.

Analyse

Exercice 1 : Fonctions de deux variables (5 points)

On considère la fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ définie par

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)$$

1. Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f sur U.

3. Soit $(x,y) \in U$, montrer que

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

4. En déduire que f admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées.

5. Donner la nature de ce point critique.

Exercice 2 : Intégrales (7 points)

Soit pour $n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$. On se propose d'avoir un équivalent simple de u_n.

1. **a.** Dériver $f\colon x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, et en déduire u_0.

b. Calculer u_1.

2. **a.** Montrer que (u_n) est décroissante, puis justifier qu'elle est convergente.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $v_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

a. Vérifier que $\forall n \geqslant 2,\ u_n + u_{n-2} = v_n$

b. En intégrant v_n par parties, montrer que

$$\forall n \geqslant 2,\ nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$$

c. En admettant que (nu_n) soit convergente, donner un équivalent simple de u_n.

Algèbre

Exercice 3 : Applications linéaires (5 points)

On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3, et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ sa base canonique. On pose alors

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & 2P - (X-1)P' \end{array} \right.$$

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Calculer la matrice de φ dans la base canonique.

3. φ est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

4. On note $\mathcal{B}' = \Big(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3\Big)$. Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, puis donner la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$.

5. Donner une base de l'image et du noyau de φ.

Exercice 4 : Restitution organisée de connaissances (3 points)

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel de dimension $n > 1$.

1. $F = \langle (1, -2, 1), (1, 2, -3) \rangle$ et $G = \langle (5, -3, -2) \rangle$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que :

$$f \text{ injective} \iff \ker f = \{0_E\}$$

3. Démontrer le théorème de la base incomplète :
Soit $\mathcal{P} = (e_1, \cdots, e_p)$ une famille libre (où $p \leqslant n$).
Alors, il existe une famille $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ telle que $(e_1, \cdots, e_n)$ soit une base de E.