MATHÉMATIQUES - MT12

TRONC COMMUN

FINAL - PRINTEMPS 2014

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 90 MINUTES

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Une feuille de notes manuscrites est le seul document autorisé.
L'utilisation d'une calculatrice ou d'un téléphone est donc interdite.
Les deux exercices sont à rédiger sur des copies différentes.

Exercice 1 (10 points) Les trois questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \arctan(x^2+y^2) \end{array} \right.$. Calculer le gradient de f en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 - xy + y^2 \end{array} \right.$
   (a) Montrer que f admet un unique point critique.
   (b) À quel type d'extremum local correspond ce point critique ?
3. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$ (en particulier, on précisera la valeur de ces dérivées partielles en $(0,0)$).
   (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Changez de copie

Exercice 2 (10 points)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2, à coefficients réels, muni de la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$.

On définit l'application f sur E par : $\forall P \in E,\ f(P) = 2X\,P - (X^2 - 1)P'$.

1. Vérifier que si P appartient à E, alors $f(P)$ est de degré au plus 2.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E (c'est-à-dire une application linéaire de E dans E).
3. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E. Quel est le rang de A ?
   f est-il bijectif ?
4. On pose $Q_1 = (1 + X)^2$, $Q_2 = 1 - X^2$ et $Q_3 = (1 - X)^2$.
   (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de E.
   (b) Calculer $f(Q_1)$, $f(Q_2)$ et $f(Q_3)$ en fonction de Q_1, Q_2 et Q_3.
   (c) En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Déterminer une base du noyau de f.