

Travaux dirigés MT2

Groupes S et T

TD 0 : Dérivées et fonctions usuelles

Exercice 1. Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1. x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2 + 1} \qquad 2. x \mapsto \frac{1}{(x + 1)^2} \qquad 3. x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x + 2)^4}$$

Exercice 2. Après avoir déterminé le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1. x \mapsto \arctan(e^x) \qquad 2. x \mapsto \arctan(\sinh x) \qquad 3. x \mapsto \arctan\left(\tanh \frac{x}{2}\right)$$

Qu'en déduire ?

Exercice 3. Soient f et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

1. Rappeler la formule de la dérivée de la composée $(g \circ f)'$.
2. On suppose que f est bijective sur \mathbb{R} , et on considère $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$. Utiliser la formule précédente pour calculer $(f^{-1})'(a)$.

Exercice 4. Étudier les fonctions arccos, arcsin, arctan (pour chaque fonction, étudier l'ensemble de définition, la dérivabilité, le tableau de variations, et tracer la courbe représentative).

Exercice 5. 1. Étudier la fonction f définie par $x \mapsto \arccos(1 - x^2)$
 2. Étudier la fonction $g : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

Exercice 6. 1. Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur l'intervalle $[0; 1[$.
 2. En déduire que $\forall x \in [0; 1[$, $\arcsin(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 7. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f : x \mapsto \frac{\cosh(\ln x) + \sinh(\ln x)}{x}$? Simplifier alors l'expression de $f(x)$.

TD 1 : Primitives, integration

Exercice 8. Donner les primitives des fonctions

1. $t \mapsto \cos t \sin t$

2. $t \mapsto \tan t$

3. $t \mapsto \cos^3 t$

Exercice 9. Donner les primitives des fonctions

1. $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^3}$

2. $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

3. $t \mapsto \frac{t}{1+t^4}$

Exercice 10. À l'aide d'intégration par parties, déterminer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 t \ln t dt$

2. $\int_0^{\sqrt{3}} t \arctan t dt$

3. $\int_0^\pi t \sin t dt.$

Indication. Pour le **2.** on pourra chercher deux réels a et b tels que $\frac{t^2}{t^2+1} = a + \frac{b}{t^2+1}, \forall t \in \mathbb{R}.$

Exercice 11. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \frac{dt}{t^2}$

2. $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

3. $\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$

Exercice 12. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt$

2. $\int_1^2 \ln t dt$

3. $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt.$

Exercice 13. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}.$

Exercice 14. 1. Chercher des coefficients réels a, b, c, d tels que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{t^3}{t+1} = at^2 + bt + c + \frac{d}{t+1}.$

2. Calculer les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}}$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt[6]{2+x}.$

Exercice 15. Déterminer les primitives suivantes en procédant par le changement de variable donné :

1. $\int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}},$ en posant $u = \sqrt{t}$

2. $\int \frac{\ln t dt}{t + t(\ln t)^2}$, en posant $u = \ln t$
3. $\int \frac{e^{2t} dt}{e^t + 1}$, en posant $u = e^t$ (on pourra chercher deux réels a et b tels que $\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \frac{u}{u+1} = a + \frac{b}{u+1}$).

Exercice 16. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable donné:

1. $I_1 = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{e^x + 1}$, en posant $u = e^x$.

Indication. On pourra chercher deux réels a et b tels que $\frac{1}{u^2 + u} = \frac{a}{u+1} + \frac{b}{u}$, $\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

2. $I_2 = \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$ en posant $u = \sqrt{t}$.

Exercice 17. Soit n un entier naturel, et $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2} .
3. Donner la valeur de I_n en fonction de n .

Exercice 18. 1. Calculer $\int_0^1 \frac{1 - (1-x)^n}{x} dx$ en posant le changement de variables $u = 1 - x$.

2. Simplifier l'expression $\frac{1 - (1-x)^n}{x}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton, et en déduire la relation :

$$\binom{n}{1} - \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \frac{1}{3} \binom{n}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \binom{n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Rappel : $\binom{n}{k}$ représente le coefficient binomial k parmi n .

Exercice 19. Calculer les limites des suites de terme général :

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \text{ et } v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}}.$$

Exercice 20. Soit la fonction définie de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R} telle que

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt.$$

1. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition.
2. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln(2).e^x \leq f(x) \leq \ln(2).e^{2x}$, et que pour tout réel $x < 0$, $\ln(2).e^x \geq f(x) \geq \ln(2).e^{2x}$.
3. Prolonger f en zéro par continuité. On note encore f la fonction prolongée.
4. f est-elle dérivable en zéro ?

Exercice 21. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation liant I_n et I_{n+1} .
3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_n < \frac{e}{n+1}$$

4. Déterminer la limite puis un équivalent simple de (I_n) .
5. Soit (u_n) une suite réelle définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e - (n+1)u_n$$

On suppose que $a \neq I_0$, montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $|u_n| \rightarrow +\infty$.

Exercice 22. Pour tout entier n , on note :

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x e^{-x^2}(1-x)^n dx.$$

1.
 - a. Former le tableau de variation sur $[0,1]$ de $x \mapsto x e^{-x^2}$.
 - b. En déduire pour tout n de \mathbb{N} :

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}$$

- c. Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2.
 - a. À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout n de \mathbb{N} :

$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1}.$$

- b. En déduire la limite de I_n et celle de $n.I_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 23. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}.$$

1.
 - a. Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in [0, x], \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2}$.
 - b. Établir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\frac{1}{e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.
 - c. En déduire que la fonction f est continue (à droite) en 0.
2.
 - a. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire : $f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x)$, où g est une fonction que l'on déterminera.
 - b. Étudier les variations, puis le signe de la fonction g . En déduire que f est décroissante sur \mathbb{R}^+ .
3.
 - a. Montrer que, pour tout réel t positif, on a : $\frac{t}{e^t + 1} \leq 1$.
 - b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 24 (Final 2021). Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$. On se propose d'avoir un équivalent simple de u_n .

1.
 - a. Dériver $f: x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, et en déduire u_0 .
 - b. Calculer u_1 .
2.
 - a. Montrer que (u_n) est décroissante, puis justifier qu'elle est convergente.
 - b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
3. Pour tout $n \geq 2$, on pose $v_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$.
 - a. Vérifier que $\forall n \geq 2, u_n + u_{n-2} = v_n$
 - b. En intégrant v_n par parties, montrer que

$$\forall n \geq 2, nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$$

- c. En admettant que (nu_n) soit convergente, donner un équivalent simple de u_n .

TD 2 : Espaces Vectoriels

Exercice 25. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 ?

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.

Exercice 26. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur \mathbb{C} ?

- 1 - $\left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ -a & 0 & ia \\ 0 & a & a \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{C} \right\}$
- 2 - $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ d & 0 & c \end{pmatrix} ; abc = 1 \right\}$
- 3 - $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ d & 0 & c \end{pmatrix} ; a + b + c = 0 \right\}$

Exercice 27. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ?

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y + z = 0, x - y = z - 2x\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y + z = 0, (x - y)^2 = z - 2x\}$$

Exercice 28. On désigne par E le \mathbb{K} -espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

$$\{f \in E, 2.f(0) = f(1)\}, \{f \in E, f(0) + 1 = f(1)\}, \{f \in E, \forall x \in [0, 1] f(x) = f(1 - x)\}.$$

Exercice 29. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\}$
2. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\}$
3. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ convergente}\}$
4. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ arithmétique}\}$

Exercice 30. Soient $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, \mathcal{C} l'ensemble des fonctions de E qui sont croissantes, et $\Delta = \{f - g \mid f \in \mathcal{C}, g \in \mathcal{C}\}$. Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 31. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. $F \cap G$ est-il un sous-espace vectoriel de E ? Si oui, le démontrer, sinon, donner un contre-exemple.
2. $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de E ? Si oui, le démontrer, sinon, donner un contre-exemple.

Exercice 32. Soient $P(X) = -X + 2X^2$, $Q(X) = i + 4X + 2X^2$, et $R(X) = 3i + 13X + 4X^2$ des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ (l'ensemble des polynômes à coefficients complexes : c'est un espace vectoriel sur \mathbb{C}).

1. Le polynôme R appartient-il au sous-espace engendré par P et Q ?

2. Donner une base du sous-espace vectoriel engendré par ces trois polynômes.

Exercice 33. Soient $F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \mid \int_{-1}^1 f(t) dt = 0 \right\}$

et $G = \{ f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \mid f \text{ constante} \}$.

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$.

Familles libres et génératrices, bases

Exercice 34. Montrer dans $\mathbb{R}_1[X]$ (polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 1) que la famille $(1 + X, -1 + X, 2 + X)$ est liée (on donnera une combinaison linéaire qui le montre) mais que deux vecteurs quelconques de cette famille forme une partie libre.

Exercice 35. Les familles suivantes de vecteurs de \mathbb{R}^3 sont-elles libres ?

Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :

1. (\vec{x}_1, \vec{x}_2) avec $\vec{x}_1 = (1, 0, 1)$ et $\vec{x}_2 = (1, 2, 2)$
2. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ avec $\vec{x}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{x}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{x}_3 = (1, 1, 1)$
3. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ avec $\vec{x}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{x}_2 = (2, 1, -1)$ et $\vec{x}_3 = (1, -1, -2)$
4. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ avec $\vec{x}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{x}_2 = (2, -1, 3)$ et $\vec{x}_3 = (-1, 1, -1)$.

Exercice 36. On pose $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = x \cos x$, $f_3(x) = \sin x$ et $f_4(x) = x \sin x$.

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice 37. Dans \mathbb{R}^3 , on considère $\vec{x} = (1, -1, 1)$ et $\vec{y} = (0, 1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $\vec{u} = (1, 1, 2)$ appartienne à $\text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$. Comparer alors $\text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$, $\text{Vect}(\vec{x}, \vec{u})$ et $\text{Vect}(\vec{y}, \vec{u})$.

Exercice 38. Soit $E = \{(x + 2y, -x + y, 5x), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$. Justifier rapidement le fait que E soit un \mathbb{R} -espace vectoriel et donner une base.

Exercice 39. Les familles suivantes sont-elles libres? Sont-elles génératrices de \mathbb{R}^2 ? Sont-elles des bases de \mathbb{R}^2 ?

$$\begin{aligned} & ((1, 0), (0, 1)), \quad ((1, 1), (1, 2), (-1, 0)), \quad ((3/5, 1), (0, 0)), \\ & ((1, 1)), \quad ((0, 0)), \quad ((3, 1), (-3/2, -1/2)) \end{aligned}$$

Exercice 40. Soit, dans la base canonique, le vecteur $u = (1, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$. Vérifier rapidement si les familles de \mathbb{R}^3 suivantes sont des bases de \mathbb{R}^3 ou non et, si oui, calculer les coordonnées de u dans la nouvelle base.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left((1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0) \right), & \mathcal{B} &= \left((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1) \right), \\ \mathcal{C} &= \left((2, 0, 3), (4, 2, 6), (1, 0, 3) \right), & \mathcal{D} &= \left((1, 3, 2), (2, 5, 0), (3, 0, 0) \right). \end{aligned}$$

Exercice 41. Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels, de base (e_1, e_2, e_3) . On considère les vecteurs de cet espace, définis par :

$$f_1 = e_1 + e_2 + e_3, f_2 = e_1 + e_2 - e_3, f_3 = -e_1 + e_3, f_4 = e_1 + e_2.$$

- 1) Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille liée et génératrice de E .
- 2) Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .
- 3) Donner les coordonnées de $u = e_1 + 2e_2 + e_3$ dans la base \mathcal{B} .

Exercice 42. Pour quelles valeurs du paramètre réel m la famille $\left(\binom{1}{m}, \binom{m}{3}\right)$ est-elle une base de \mathbb{R}^2 ?

Exercice 43. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ trois vecteurs de E tels que la famille $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ soit libre. On pose $\vec{u} = \vec{y} + \vec{z}$, $\vec{v} = \vec{z} + \vec{x}$ et $\vec{w} = \vec{x} + \vec{y}$. Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre.

Exercice 44. Dans \mathbb{R}^3 , déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = (1, 1, 0)$ et $\vec{v} = (2, 1, 1)$
2. $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{u} = (-1, 1, 0)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, 1)$
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

Dimension et somme

Exercice 45. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 46. Donner la dimension des espaces vectoriels sur \mathbb{R} suivants :

1. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ fixé, et de dérivée seconde s'annulant en 0.
2. \mathbb{C}^3 .
3. Le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par $\left((1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 0), (1, 0, 1, 2)\right)$

Exercice 47. Supposons que E est un espace vectoriel de dimension n . Soit $0 \leq p \leq n$. Existe-t-il un sous espace vectoriel de dimension p ?

Exercice 48. A-t-on les égalités entre espaces vectoriels réels suivantes :

1. $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}) + \text{Vect}(\{(2, 1, 2, 1)\})$.
2. $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(\{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\}) + \text{Vect}(\{(1, 1, 2)\})$. Cette somme est-elle directe ?

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$, $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_3[X] + \{P(X) \in \mathbb{R}_n[X]/P''(0) = 0\}$. Cette somme est-elle directe ?
4. $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x + y + z = 0\} \oplus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x = y = z\}$. Déterminer la dimension de ces espaces vectoriels.

Exercice 49. On considère dans $E = \mathbb{R}^3$, les vecteurs :

$$a = (1, 1, 1) ; b = (1, 1, 2) ; c = (1, 1, 0) ; d = (0, 0, 1) ; e = (0, 1, 1)$$

1. Montrer que le sous-espace engendré par $\{a, b\}$ est égal au sous-espace engendré par $\{c, d\}$.
2. Montrer que $E = \text{Vect}(a, b) + \text{Vect}(e)$. Cette somme est-elle directe ?
3. Compléter la famille (a, c) en une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 50. Dans \mathbb{R}^4 , soient F et G les espaces vectoriels engendrés respectivement par les vecteurs $f_1 = (1, 0, 1, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0, 1)$, $f_3 = (1, 2, 0, 1)$ et $g_1 = (1, 2, -1, 2)$, $g_2 = (0, 0, 1, 0)$, $g_3 = (1, 3, -2, 3)$, $g_4 = (0, 1, 0, 1)$.

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de F et en déduire la dimension de F .
2. Montrer que $g_4 \in \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ et que (g_1, g_2, g_3) est une base de G . En déduire la dimension de G .
3. En déduire (sans aucun calcul) un système générateur de $F + G$.
4. Montrer que (f_1, f_2, f_3, g_2) est une base de $F + G$.
5. Donner la dimension de $F \cap G$.
6. Montrer que (g_1, g_3) est une base de $F \cap G$.

Exercice 51. Dans \mathbb{R}^4 on considère les vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, -1, 0)$, $\vec{w} = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{x} = (0, 0, 1, 0)$ et $\vec{y} = (1, 1, 0, -1)$. Soit $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $G = \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$. Quelles sont les dimensions de F , G , $F + G$, et $F \cap G$?

Exercice 52. Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes de \mathbb{R}^4 :

1. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ avec $\vec{x}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{x}_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $\vec{x}_3 = (1, 0, 1, 1)$.
2. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$ avec $\vec{x}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\vec{x}_2 = (1, -1, 1, 0)$, $\vec{x}_3 = (2, 0, 1, 1)$ et $\vec{x}_4 = (0, 2, -1, 1)$.

TD 3 : Développements limités

Exercice 53. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de zéro de chacune des fonctions :

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1. $f : x \mapsto \sin x - \cos x + \frac{1}{1-x}$ | 4. $f : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ |
| 2. $f : x \mapsto \sqrt{1+x} \sin x$ | 5. $f : x \mapsto \sin(\tan x)$ |
| 3. $f : x \mapsto \sin x \cos x$ | 6. $f : x \mapsto e^{\sin x}$ |

Exercice 54. Donner les DL à l'ordre 3 au voisinage de 1 de chacune des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \ln x, \quad x \mapsto e^x, \quad x \mapsto \sqrt{1+x}$$

Exercice 55. Écrire le développement limité de la fonction f à l'ordre n au voisinage de a .

1. $f : x \mapsto \sin x$, avec $a = \frac{\pi}{3}$, et $n = 4$.
2. $f : x \mapsto x \cos x$, avec $a = \frac{\pi}{2}$, et $n = 5$.
3. $f : x \mapsto \ln \sqrt{x}$, avec $a = 1$, et $n = 3$.

Exercice 56. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + x^2 + x^3 \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro, mais que $f''(0)$ n'existe pas.

Exercice 57. En utilisant des développements limités, déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x \right) \frac{1}{x^2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\sin x - x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$$

Exercice 58. En utilisant des développements limités, déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1) \ln x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \text{ avec } a > 0 \text{ et } b > 0$$

Exercice 59. Déterminer le développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Exercice 60. Soit n un entier naturel.

1. Rappeler le $DL_n(0)$ de la fonction $u \mapsto \frac{1}{1+u}$
2. En déduire le développement limité en zéro à l'ordre $2n$ de $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
3. Calculer le développement limité en zéro à l'ordre $2n+1$ de la fonction Arctan .

Exercice 61. On considère la fonction f définie sur $] -1, 1[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$. Calculer $f'(x)$, et déterminer le développement limité de f au voisinage de zéro à l'ordre 8.

Exercice 62. 1. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de zéro de la fonction arcsin.

2. Calculer le $DL_5(0)$ de $f : x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. En déduire le $DL_6(0)$ de la fonction $g : x \mapsto \arcsin^2 x$.

Exercice 63. Étudier localement la fonction $f : x \mapsto \frac{1-e^x}{x}$ au voisinage de zéro : prolongement par continuité, dérivabilité, équation de la tangente, position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 64. Soit f la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Déterminer $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 65. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

2. On note encore f son prolongement par continuité. Donner le $DL_2(0)$ de f .

3. Que peut-on en déduire pour le graphe de f au point d'abscisse 0 ?

Exercice 66. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$.

1. Rappeler le $DL_3(0)$ de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$.

2. En déduire que le graphe \mathcal{C}_f représentant f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$. On donnera l'équation réduite de cette asymptote, et on précisera la position relative de cette asymptote par rapport à \mathcal{C}_f .

Exercice 67. Étudier les branches infinies de f avec $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Préciser également le comportement local en $x_0 = 0$.

Exercice 68 (Final 2007).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x^2 + 1) \arctan x$.

1. Étudier la parité de f . Proposer un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

2. Dresser le tableau de variations de f , en précisant la limite en $+\infty$.

3. Montrer que f est bijective.

4. Calculer le $DL_3(0)$ de f . En déduire la nature du point O .

5. On note g la bijection réciproque de f .

- a. Que vaut $g(0)$?
 - b. Justifier que g est dérivable sur \mathbb{R} , et calculer $g'(0)$.
En déduire une équation de la tangente en O à la courbe représentant g .
 - c. On admet que g est infiniment dérivable sur \mathbb{R} . Démontrer sans calcul que $g''(0) = 0$.
6. On propose de déterminer le $DL_3(0)$ de $g = f^{-1}$. On note ce développement limité $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^3\varepsilon(x)$, où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.
- a. Montrer que $a_0 = 0$.
 - b. Exprimer le $DL_3(0)$ de la composée $f \circ g$ en fonction des coefficients a_1, a_2, a_3 .
 - c. Utiliser alors l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}, f(g(x)) = x$ pour identifier les coefficients a_1, a_2, a_3 .

Exercice 69. 1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $1 - x - x^2 = 0$. On notera α_1 et α_2 ses deux solutions telles que $\alpha_1 < \alpha_2$.

2. Justifier que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x-x^2}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}$.
3. On suppose dans cette question uniquement que n est un entier supérieur ou égal à 2. En utilisant la formule de Leibniz, et la relation $(1 - x - x^2)f(x) = 1$, démontrer que pour tout réel x différent de α_1 et α_2 :

$$(x^2 + x - 1)f^{(n)}(x) + n(2x + 1)f^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$$

4. On définit la suite u par $u_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout entier naturel n .
 - a. Donner u_0 et u_1 .
 - b. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
5. Donner le $DL_n(0)$ de la fonction f en fonction des termes de la suite u .
Calculer ce développement lorsque $n = 5$.

Exercice 70 (Final 2011).

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 2x \cosh x$.

Partie A.

1. Montrer que pour tout réel $x \in]0, 1]$, $f(x) - x > 0$.
2. Prouver que f réalise une bijection de $[0, 1]$ vers un intervalle à préciser. On note $f^{(-1)}$ la bijection réciproque de f .
Dresser les tableaux de variations de f et $f^{(-1)}$.
3. Calculer le $DL_3(0)$ de la fonction f .

Partie B. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f^{(-1)}(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in]0, 1]$.
2.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
 - b. En déduire que la suite est convergente, et déterminer sa limite.
3. On pose pour tout entier naturel n : $a_n = 2^n u_n$.
 - a. vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\cosh(u_{n+1})}$. En déduire que la suite (a_n) est décroissante.
 - b. Prouver que la suite (a_n) est convergente.

Exercice 71. On considère, pour tout entier naturel n , l'application φ_n définie sur \mathbb{R} par : $\varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$, ainsi que l'intégrale $I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$.
On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$$

1. Calculer I_0, I_1 .
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n .
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. Majorer la fonction $g : x \rightarrow e^{-2x}$ sur $[0, 1]$.
6. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
 8. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$
9. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
 10. Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
 11. Donner alors les valeurs de a, b, c .

TD 4 : Applications linéaires

Exercice 72. Les applications entre \mathbb{R} -espaces vectoriels suivantes sont-elles linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : (x, y, z) \mapsto x + y + 2z$
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \mapsto x + y + 1$
3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \mapsto xy$
4. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : (x, y, z) \mapsto x - z$?

Exercice 73. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

Montrer que f est un automorphisme (c'est-à-dire un endomorphisme bijectif) de \mathbb{R}^2 et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 74. Soit l'application

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (y + z, x + z, x + y) \end{array}$$

1. Montrer que u est une application linéaire. Est-ce un automorphisme ?
2. Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$, et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$.
 - a. Déterminer une base de E puis une base de F .
 - b. En déduire $u(E)$ et $u(F)$.

Exercice 75. On considère les vecteurs $(1, 2, 0)$, $(0, 1, -2)$, $(3, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ de \mathbb{R}^3 .

On suppose que ces 4 vecteurs sont l'image des 4 vecteurs canoniques de \mathbb{R}^4 , e_1 , e_2 , e_3 , et e_4 , par une application linéaire f de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 .

1. Calculer l'image par f du vecteur $(2, 3, 1, 2)$.
2. Calculer l'image par f d'un vecteur quelconque de \mathbb{R}^4 .

Exercice 76. Justifier qu'il existe une unique application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 telle que : $f(1, 0, 0) = (0, 1)$, $f(1, 1, 0) = (1, 0)$ et $f(1, 1, 1) = (1, 1)$.

Exprimer $f(x, y, z)$ et déterminer noyau et image de f .

Exercice 77. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^5 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, x + y + z, 2x + y + z, 2x + 2y + z, y + z) \end{array}$.

Calculer une base du noyau, et une base de l'image de f . Écrire la formule du rang pour f .

Exercice 78. Soit (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 . Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 défini par :

$$f(e_1) = e_1 - e_2, \quad f(e_2) = -e_1 + e_2.$$

1. Calculer les coordonnées de l'image par f du vecteur (x, y) .
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
4. Montrer que les sous-espaces $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 79. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$. Montrer les équivalences suivantes :

1. $\text{Im} f \cap \text{Ker} f = \{0\} \iff \text{Ker} f = \text{Ker} f^2$,
2. $\text{Im} f + \text{Ker} f = E \iff \text{Im} f = \text{Im} f^2$.

Exercice 80. Soient deux \mathbb{R} -espaces vectoriels :
 $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $F = \{x \mapsto a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x); (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Justifier sans démonstration le fait que F est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
2. Montrer que l'application "dérivée seconde" est un endomorphisme sur E , puis sur F .
3. Déterminer le noyau et l'image de cette application dans les deux cas. A-t-on $\text{Ker}(d) \oplus \text{Im}(d) = E$ (resp. F) ?

Exercice 81. Soient \mathcal{B} une base de \mathbb{R}^2 , m un nombre réel, et f_m l'endomorphisme défini dans la base \mathcal{B} par la matrice

$$M_{f_m} = \begin{pmatrix} m & m-1 \\ m+1 & m-2 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de m , f_m est-il bijectif ? Dans les cas où f_m est bijectif, déterminer le noyau de f_m^{-1} dans \mathcal{B} .

Exercice 82. Soit l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ qui à $P(X) \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $X \cdot P(X)$ par $X^4 - X^2 - 1$.
 Montrer que f est linéaire et écrire la matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.

Exercice 83. Soit $C = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3$, $f(e_2) = -2e_1 + 2e_3$, $f(e_3) = -4e_1 + e_2 + 4e_3$.

1. Donner une base de $\text{Im} f$.
2. Trouver une base \mathcal{B}_1 de $\text{Ker}(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$, et \mathcal{B}_2 de $\text{Ker} f$.
3. Montrer que la juxtaposition de \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 est libre, et compléter en une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 .

Exercice 84. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 4 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\text{Id}_E$.

1. Soit $x \in E$ non nul. Montrer que $(x, f(x))$ est libre.
2. Soit $y \in E$ tel que $(x, f(x), y, f(y))$ libre. Montrer que $\mathcal{B} = (x, f(x), y, f(y))$ est une base de E .
3. Quelle est la matrice de f dans \mathcal{B} ?
4. Déterminer $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ telle que $f \circ f = -\text{Id}_{\mathbb{R}^4}$.

Exercice 85. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{Id} = \mathbf{0}$.

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f .
2. Établir que $\ker(f - \text{Id})$ et $\ker(f - 2\text{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exercice 86. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 4f + 3I = \mathbf{0}_E$.

Montrer que $\ker(f - \text{Id}) \oplus \ker(f - 3\text{Id}) = E$.

Interpréter f géométriquement.

Exercice 87. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de \mathbb{R}^4 et f l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans lui-même définie par $f(e_1) = 3e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $f(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$, $f(e_3) = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$ et $f(e_4) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$.

1. Calculer $f(x, y, z, t)$ pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
2. Déterminer $\ker f$.
3. Soit $F = \text{Vect}(e_3, e_4)$. F et $\ker f$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 88. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. On suppose que $f \circ f$ est l'application nulle sur \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que $\text{Im } f \subset \ker f$.
2. On suppose maintenant que $f \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Déterminons le rang de f par disjonction de cas : peut-on avoir $\text{rg}(f) = 0$? $\text{rg}(f) = 3$? $\text{rg}(f) = 2$ (utiliser la formule du rang) ?
En déduire le rang de f .

TD 5 : Fonctions de deux variables

Exercice 89. Quels sont les ensembles de définition des fonctions suivantes ? (Représenter graphiquement ces ensembles).

- | | |
|--|--|
| 1. $f_1 : (x, y) \mapsto \ln \sqrt{\frac{1+xy}{1-xy}}$ | 3. $f_3 : (x, y) \mapsto \ln(1 + x^2 - y^2)$ |
| 2. $f_2 : (x, y) \mapsto e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}$ | 4. $f_4 : (x, y) \mapsto \frac{xy}{ x + y }$ |

Exercice 90. Étudier les limites en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $f_1 : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ | 3. $f_3 : (x, y) \mapsto \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ |
| 2. $f_2 : (x, y) \mapsto \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$ | 4. $f_4 : (x, y) \mapsto \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ |

Exercice 91. Étudier la continuité sur \mathbb{R}^2 des fonctions suivantes :

1. $(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. $(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
3. $(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4y}{x^4+y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
4. $(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^4}{x^4+y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 92. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ | 3. $(x, y) \mapsto (ax^2 + by^2)^n$, où $n \in \mathbb{N}$ |
| 2. $(x, y) \mapsto xe^{\sin(xy)}$ | 4. $(x, y) \mapsto x^y, x > 0$ et $y > 0$ |

Exercice 93. Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous, au point (x_0, y_0, z_0) donné :

1. $z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 3)$;
2. $z = \sin(\pi xy) \exp(2x^2y - 1)$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1/2, 1)$.

Exercice 94. Trouver les points sur le paraboloid $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x + 2y + z = 6$. Même question avec le plan $3x + 5y - 2z = 3$.

Exercice 95. Soit la fonction f définie par :

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. Quelles sont ses dérivées partielles d'ordre 1 ? Sont-elles continues ?
3. Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

4. f est-elle de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 96. On pose $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur Ω , puis les calculer.
3. Calculer, si elles existent, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
4. Calculer, si elles existent, les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.
Que peut-on en déduire ?

Exercice 97. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^2 y + 3y^3}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0), \\ f(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$? Justifier la réponse.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x , à y en $(0, 0)$?
Donner la ou les valeurs le cas échéant et justifier la réponse.
3. La fonction f admet-elle un développement limité d'ordre 1 en $(0, 0)$?
4. Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.
5. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1, 1, 2)$.

Exercice 98. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , et $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. On pose $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (laplacien de f).

1. Calculer $\frac{\partial g}{\partial \rho}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ en fonction des dérivées partielles de f .
2. Exprimer Δf en fonction des dérivées de g .

Exercice 99. Déterminer les points critiques et, lorsque cela est possible, les extrema des fonctions suivantes définies dans \mathbb{R}^2 :

1. $f_1 : (x, y) \mapsto \frac{y}{1+x^2}$.
2. $f_2 : (x, y) \mapsto 3x^3y - 2xy - 4$.
3. $f_3 : (x, y) \mapsto e^x - xy$.
4. $f_4 : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

Exercice 100. Soit $f : (x, y) \mapsto (x-1)y(y-x)$ sur le domaine délimité par les droites $(y=x), (y=0)$ et $(x=1)$.

1. Étudier les extrema locaux de f .
2. Étudier f sur le bord de son domaine d'étude.
3. En déduire les extrema globaux de f .

Exercice 101. Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x} \end{cases}$$

1. a. Établir que l'équation $e^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une unique solution et qu'elle appartient à l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$.
(On donne $\sqrt{e} \approx 1,6487$ et $e \approx 2,7183$)
- b. Montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \text{ et établir que } \begin{cases} x_0 - e^{-x_0} = 0 \\ y_0 = \frac{x_0}{2} \end{cases}$$

- c. Montrer que f admet un extremum en (x_0, y_0) . Est-ce un minimum ou un maximum ?
- d. Montrer que $f(x_0, y_0) = \frac{x_0^2}{2} + x_0$

2. On note $g : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1+x}{1+e^x} \end{cases}$

- a. Montrer que l'équation $g(x) = x$, d'inconnue $x \in [0, +\infty[$, admet une solution et une seule, que celle-ci est x_0 .
- b. Former le tableau des variations de g et tracer sa courbe représentative (repère orthonormé, unité : 5 cm).

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = g(u_n)$

- c. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers x_0 .

Exercice 102 (Final 2021). On considère la fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ définie par

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (1+x)(1+y)$$

1. Justifier que U est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f sur U .
3. Soit $(x, y) \in U$, montrer que

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

4. En déduire que f admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées.
5. Donner la nature de ce point critique.

TD 6 : Changement de base, rang

Exercice 103. Donner les matrices correspondant (par multiplication à gauche ou à droite) aux opérations élémentaires sur une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ (*i.e.* la première ligne se transforme en la somme des deux premières).
2. $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$.
3. $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$ (C pour colonne).

Exercice 104. Trouver l'inverse des matrices (s'il existe) :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 105. Soit dans la base canonique de \mathbb{R}^3 les endomorphismes f et g dont les matrices associées respectives sont $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base $\beta = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$.
2. Calculer $M_f \times M_g$. En déduire la matrice de g dans β .
3. Retrouver le résultat directement.

Exercice 106. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Soient $B_1 = (1 + X, X, 1 + X^2, X^3)$ et $B_2 = (1 + X + X^3, 1 + X + X^2, 1, 1 + 2X + X^3)$ deux bases de E . Déterminer les matrices de changement de base.

Exercice 107. Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$
2. $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$
3. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\bar{z}$ (\mathbb{C} est ici vu comme un \mathbb{R} -espace vectoriel).

Exercice 108. Chercher les rangs des matrices suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{1.} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}. & \mathbf{3.} & \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \\
 \mathbf{2.} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}. & \mathbf{4.} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

Exercice 109. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$M = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de \mathbb{R}^3 et calculer la matrice de u par rapport à cette base.

Exercice 110. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

L'application "dérivée seconde" induit un morphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_1[X]$.

On sait qu'après avoir choisi une base on peut identifier $\mathbb{R}_n[X]$ et \mathbb{R}^{n+1} .

Le morphisme "dérivée seconde" induit ainsi un morphisme f de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^2 (on choisit les bases canoniques).

1. Déterminer les images des 4 vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^4 par f .
2. En déduire la matrice de f dans les bases canoniques.
3. Déterminer les bases \mathcal{A} et \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^2 qui correspondent respectivement aux bases $(1 + X, X, X + X^2, X^3)$ et $(1 + X, X)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$.
4. Trouver la matrice de f dans les bases \mathcal{A} et \mathcal{B} .

Exercice 111. Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 dont la matrice relativement

aux bases canoniques, (I, J, K, L) et (i, j, k) est $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit deux nouvelles bases : $\mathcal{B} = (I, J, 4I + J - 3L, -7I + K + 5L)$ et $\mathcal{B}' = (4i + 2j + k, 5i + j - k, k)$.

Quelle est la matrice de f relativement à \mathcal{B} et \mathcal{B}' ?

Exercice 112. Soit h l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 défini par rapport à deux bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On prend dans \mathbb{R}^3 la nouvelle base :

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2.$$

Quelle est la matrice A_1 de h dans les bases (e'_1, e'_2, e'_3) et (f_1, f_2) ?

2. On choisit pour base de \mathbb{R}^2 les vecteurs :

$$f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

en conservant la base (e'_1, e'_2, e'_3) de \mathbb{R}^3 . Quelle est la matrice A_2 de h dans les bases (e'_1, e'_2, e'_3) et (f'_1, f'_2) ?

Exercice 113. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur à 2. On note (e_0, e_1, e_2) sa base canonique. On considère l'application $f : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ P & \mapsto P'' - 5P' + 6P \end{cases}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Écrire la matrice A de f relativement à la base (e_0, e_1, e_2) .
3. Montrer que f est un automorphisme de E . En déduire $\ker f$.
4. Écrire la matrice de f^{-1} relativement à la base (e_0, e_1, e_2) .

Exercice 114 (Final 2014). Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2, à coefficients réels, muni de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. On définit l'application f sur E par : $\forall P \in E, f(P) = 2X P - (X^2 - 1)P'$.

1. Vérifier que si P appartient à E , alors $f(P)$ est de degré au plus 2.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E (c'est-à-dire une application linéaire de E dans E).
3. Écrire la matrice A de f dans la base canonique \mathcal{B} de E . Quel est le rang de A ? f est-il bijectif ?
4. On pose $Q_1 = (1 + X)^2$, $Q_2 = 1 - X^2$ et $Q_3 = (1 - X)^2$.
 - a. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de E .
 - b. Calculer $f(Q_1)$, $f(Q_2)$ et $f(Q_3)$ en fonction de Q_1 , Q_2 et Q_3 .
 - c. En déduire la matrice A' de f dans la base \mathcal{B}' .
 - d. Déterminer une base du noyau de f .