Final MTB, Printemps 2017

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.
Tous les exercices sont à rendre sur des copies séparées.

Analyse

Exercice 1 : Développements limités (5 points)

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $\varphi(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \cos(x)}{x}$.

1. Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}^\star$.

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de φ.

3. En déduire la limite ℓ de φ en 0.

4. On prolonge φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \ell$. On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Déduire des questions précédentes que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 donné par :

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \quad \text{où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

c. En déduire l'équation de la tangente T à la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f au point d'abscisse 0 et la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à T.

Exercice 2 : Fonctions de deux variables (5 points)

Soit g l'application définie par $g : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + \ln(x) \end{array} \right.$

1. Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, et dresser son tableau de variations.

2. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ d'inconnue $x \in]0,+\infty[$ admet une unique solution. On notera α cette solution dans la suite.

3. On considère l'application $F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xe^y + y\ln(x) \end{array} \right.$. On admet que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition.

a. Calculer les dérivées partielles premières de F.

b. Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative de F au point de coordonnées $(1, 0, F(1,0))$.

c. Montrer que F admet comme unique point critique le point $(\alpha, \ln(\alpha))$.

d. Déterminer la nature de ce point critique.

Algèbre

Exercice 3 : Questions de cours (5 points)

Dans cet exercice, on considère E et F deux espaces vectoriels réels.

1. Donner les définitions suivantes :

a. Une famille de vecteurs $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \cdots, \mathbf{e_n})$ de E est libre lorsque...

b. Une application $f : E \to F$ est une application linéaire de E vers F lorsque...

c. Une base de l'espace vectoriel E est...

d. Un sous-ensemble G de E est un sous-espace vectoriel de E lorsque...

2. Soient $f : E \to F$ une application linéaire, et $\mathcal{F} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \cdots, \mathbf{e_n})$ une famille de vecteurs de E.

a. Montrer que si la famille $(f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}), \cdots, f(\mathbf{e_n}))$ est une famille libre de F, alors $\mathcal{F}$ est une famille libre de E.

b. Donner un contre-exemple qui montre que la réciproque de cette implication est fausse.

Exercice 4 : Applications linéaires (5 points)

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère l'application $\Phi : E \to E$ qui, à toute fonction f de E, associe la fonction $\Phi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\Phi(f))(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. **a.** Soit $f \in E$. En introduisant une primitive F de f sur $\mathbb{R}$, justifier que $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'application Φ n'est pas surjective.

2. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

3. Soit la fonction $g : x \longmapsto \cos(2\pi x)$. Calculer pour tout réel x, $(\Phi(g))(x)$.
Φ est-elle injective ? Justifier.

4. On désigne par $\mathbb{R}_2[x]$ l'ensemble des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Alors $\mathbb{R}_2[x]$ est un sous-espace vectoriel de E.

a. Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$. Prouver que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_2[x]$.

b. On considère l'application linéaire $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = \Phi(P) \end{array} \right.$

Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (\mathbf{e_0}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$ de $\mathbb{R}_2[x]$ où $\mathbf{e_0} : x \mapsto 1$, $\mathbf{e_1} : x \mapsto x$ et $\mathbf{e_2} : x \mapsto x^2$.

c. En déduire que φ est bijective.

Le barème, donné à titre indicatif, est susceptible de modification.