1. Question de cours. Rappeler la définition d'un espace vectoriel $(E, +_{\mathbb{K}}, .)$ sur $\mathbb{K}$.
2. Déterminer si $\mathbb{R}^2$, muni des lois internes et externes suivantes, est ou n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :
   (a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \quad \lambda(a, b) = (a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \quad \lambda(a, b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b), \lambda \in \mathbb{R}$.
   (c) $(a, b) + (c, d) = (c, d); \quad \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.

---

1. cf. cours
2. (a) on voit que le problème (la différence avec la définition classique) vient de la multiplication par un scalaire $0.(a, b) = (a, 0) \neq 0$ lorsque $a \neq 0$. Ce qui contredit la propriété d'exo-distributivité : prenons $\lambda = 1, \mu = -1$ et $x = (1, 1)$. Alors $(\lambda + \mu).x = 0.(1, 1) = (0, 1)$. Et $\lambda.x + \mu.x = 1.(1, 1) - 1.(1, 1) = (1, 1) - (1, 1) = (0, 0)$. Ainsi $(\lambda + \mu).x \neq \lambda.x + \mu.x$ sur l'exemple considéré.
   (b) On voit que le problème vient ici du terme λ^2 qui n'est pas linéaire, de nouveau la propriété d'exo-distributivité va être mise en défaut. Prenons $\lambda = 1, \mu = 2, x = (1, 1)$. Alors $(\lambda + \mu).x = 3.(1, 1) = (9, 9)$. Et $\lambda.x + \mu.x = 1.(1, 1) + 2.(1, 1) = (1, 1) + (4, 4) = (5, 5)$. Ainsi $(\lambda + \mu).x \neq \lambda.x + \mu.x$ sur l'exemple considéré.
   (c) Cette fois-ci, le problème vient de l'addition. On peut voir qu'elle n'est pas commutative : $(0, 0) + (1, 1) = (1, 1)$. Mais $(1, 1) + (0, 0) = (0, 0)$. Donc $x + y \neq y + x$ sur l'exemple considéré.