## Objectifs :

L'objectif premier est que les élèves reconnaissent la linéarité de certains modèles et sachent identifier les structures d'espaces vectoriels. Il faut aussi montrer l'intérêt du linéaire et des propriétés très particulières qui y sont attachées et l'efficacité qui en découle pour la résolution effective quand les problèmes sont linéaires.

La notion de dimension (qui est à relier avec le concept usuel de degrés de liberté) et celle de base sont centrales. Si quelques exemples de dimension infinie sont nécessaires (espaces de fonctions ou de suites), cette partie visera d'abord une bonne maîtrise du calcul dans un espace de dimension finie. Les élèves devront avoir compris que ce calcul se ramène à celui dans $\mathbb{K}^n$ via une base. Le choix "stratégique" d'une base est un élément essentiel de résolution d'un problème, les élèves doivent y être sensibilisés et exercés via quelques applications classiques (par exemple de géométrie ou calcul de puissances d'une matrice). Pour toutes ces notions, une maîtrise réelle sur des exemples raisonnables sera exigible.

Deux outils fondamentaux sont la résolution de systèmes linéaires et le calcul matriciel. Le calcul matriciel est utilisé en permanence. Les élèves devront en maîtriser la technique et l'interprétation dans des contextes différents (changement de base, systèmes linéaires, endomorphismes). Pour les systèmes linéaires, on attendra que les élèves sachent dans des cas simples poser un système, le résoudre et interpréter la solution. Vu l'existence de logiciels performants, la résolution de systèmes un peu "lourds" n'est pas un objectif du programme.

## Détails du programme :

0. Étude des fonctions usuelles (traité en TD)
   - Fonctions circulaires réciproques (arcsin, arccos, arctan)
   - Fonctions hyperboliques (cosh, sinh, tanh, argcosh, argsinh, argtanh).
     *On pourra montrer l'intérêt de ces fonctions dans le paramétrage de l'hyperbole.*
1. Intégration sur un intervalle fermé borné des fonctions à valeurs réelles
   - Fonctions en escalier, et intégrale d'une fonction en escalier (propriétés)
   - Fonctions Riemann intégrables, définition et principaux exemples : les fonctions monotones, monotones par morceaux, continues, continues par morceaux.
     *L'important est de faire comprendre le passage d'une somme d'aire de rectangles à une intégrale grâce à la notion de passage à la limite, on insistera sur les illustrations graphiques.*
   - Propriétés de l'intégrale de Riemann (linéarité, croissance, relation de Chasles). Formule de la moyenne.
     *On pourra démontrer certaines de ces propriétés à partir des propriétés correspondantes de l'intégrale des fonctions en escalier.*
   - Étude de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (continuité si $f$ intégrable, dérivabilité si $f$ continue), lien entre intégrale et primitives des fonctions continues.
   - Calcul d'intégrales : intégration par parties, changement de variables.
   - Calcul de primitives : calcul de primitives de fonctions usuelles ; calcul de primitives "par parties", changement de variable, en particulier le cas où on doit utiliser un changement de variable bijectif.
     *Les changements de variables seront fournis aux étudiants.*
   - Formule de Taylor avec reste intégral.
2. Espaces vectoriels

- Combinaisons linéaires
- Espaces et sous-espaces vectoriels, opérations (intersection, somme, somme directe) sur les espaces vectoriels, sous-espaces supplémentaires
- Familles de vecteurs génératrices, familes libres et liées, bases, dimension d'un espace vectoriel, coordonnées d'un vecteur, notion de rang.

*Les exemples exotiques sont à proscrire. Les corps de référence sont* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

3. Développements limités
   - Définition et propriétés classiques
   - Opérations sur les développements limités : somme et produit
   - Composition des développements limités
   - Intégrations et dérivabilité d'un développement limité
   - Développements limités généralisés et développements asymptotiques. Application : étude des branches infinies d'une courbe.
4. Applications linéaires
   - Notions d'homomorphisme et d'isomorphisme, d'endomorphisme et d'automorphisme
   - Image et noyau, image d'un système de vecteurs (générateur, libre)
   - Résolution d'un système linéaire
   - Rang d'une application linéaire (en dimension finie), théorème du rang
   - Structure de l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$, de l'ensemble des endomorphismes de $E$.

   *On montrera le lien avec le calcul matriciel.*
5. Fonctions réelles de deux variables réelles
   - Dérivées partielles, différentielle, matrice jacobienne, vecteur gradient.
   - Tangente à une courbe $y = f(x)$, plan tangent à une surface $z = f(x, y)$.
   - Toute application admettant des dérivées partielles continues sur un $\mathbb{R}^2$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
   - Opérations sur les différentielles (somme, produit, composition).
   - Inégalité des accroissements finis. Application à l'utilisation du théorème du point fixe.
   - Applications de classe $\mathcal{C}^2$.
   - Matrice Hessienne, théorème de Schwarz (admis)
   - Développement de Taylor-Young à l'ordre 2
   - Recherche d'extrema locaux, et de points critiques (classification)
   - Exemples de problèmes d'optimisation.
6. Matrices
   - Notations matricielles d'une application linéaire
   - Espace vectoriel des matrices rectangulaires $p \times n$, rang d'une telle matrice
   - Matrice de passage, et équivalentes.

   *Les liens avec les applications linéaires et les changements de base seront faits de manière constante.*