Final MT26, Automne 2015

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Le barème, donné à titre indicatif, est susceptible de modification.
Aucun document n'est autorisé pour l'épreuve. Les calculatrices sont interdites.
Les deux parties sont à rédiger sur des copies différentes.

Exercice 1 : Séries entières (5 points)

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. **a.** Démontrer que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

b. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} a_n z^n$.

2. **a.** Rappeler le développement en série entière en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ainsi que le rayon de convergence de cette série entière.

b. En déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour $x \in]-1\,,\,1[$.

3. Soit x un réel fixé tel que $-1 < x < 1$. On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

a. Montrer que

$$(1-x)\,S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

b. En déduire la valeur de $S(x)$.

Veuillez rédiger la suite du sujet sur une nouvelle copie.

Exercice 2 : Intégrales généralisées (5 points)

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t$. **2.** $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$. **3.** $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$.

Exercice 3 : Séries de Fourier (5 points)

Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x|$ si $|x| \leqslant \pi$.

1. Déterminer le développement en série de Fourier de f.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

3. Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 4 : Séries de fonctions (5 points)

On pose

$$z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Montrer que la fonction z est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$.

2. Étudier monotonie de la fonction z.

3. Déterminer la limite de la fonction z en $+\infty$.

4. **a.** En utilisant la comparaison série-intégrale, démontrer que

$$\forall x > 1, \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant z(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

b. En déduire un équivalent de la fonction z en 1^+.