Final MT70, Automne 2009

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Le barême, donné à titre indicatif, est susceptible de modification.

Exercice 1 Calcul matriciel (5 points)

Soient les matrices à coefficients réels A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer B^2, B^3. En déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}.

3. Montrer que $A = PBP^{-1}$.

4. En déduire que $A^n = PB^nP^{-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 Équation différentielle (6 points)

Soit $E = \left\{ f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(x)e^{2x} \end{array} \right., P(x) = ax^2 + bx + c \right\}$.

Traduction : E est l'ensemble des fonctions de la forme $P(x)e^{2x}$ où P est un polynôme à coefficients réels, de degré inférieur à 2.

1. **a.** Montrer que E est un sous espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Donner une base de E ainsi que sa dimension.

c. Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & u'' - 4u' + 4u \end{array} \right.$. Montrer que φ est linéaire.

Indication : il faut montrer que $\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)$.

d. Calculer $\varphi(e^{2x})$, $\varphi(xe^{2x})$, et $\varphi(x^2e^{2x})$.

2. On considère l'équation différentielle

$$(E) : u''(x) - 4u'(x) + 4u(x) = xe^{2x}.$$

a. Trouver les solutions de cette équation.

b. Parmi ces solutions, en existe-t-il une qui appartienne à l'espace E ?

Exercice 3 Développement limité (4 points)

Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de

$$f(x) = \frac{1}{e^x + x} - \ln(1 + \sin x).$$

Exercice 4 Complexes (5 points)

1. Déterminer les racines carrées complexes de $5 - 12i$.
2. Soit l'équation $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$. Chercher une solution imaginaire pure de cette équation (de la forme $z = \lambda i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$).
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + 2i)(z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i) = 0$.
4. Soient A, B, C les points d'affixes respectives $z_A = -2i$, $z_B = -1 + 3i$, $z_C = 2 + i$. Placer les points dans un repère orthonormé. Calculer $|z_C - z_B|$, $|z_C - z_A|$, et $|z_B - z_A|$. Que peut-on en déduire sur le triangle ABC ?

n	10	11	12	13	14	15	16
n^2	100	121	144	169	196	225	256

FIG. 1 – Table des carrés parfaits

Corrigé

Exercice 1

1. $B^2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$. $B^3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&0\\0&0&27\end{pmatrix}$. *On montre par récurrence que* $B^n = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}$.

2. *Par la méthode de Gauss :*

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr}1&1&-1&1&0&0\\0&-1&1&0&1&0\\-1&0&1&0&0&1\end{array}\right) \; L_3 \leftarrow L_3+L_1 \; \left(\begin{array}{rrr|rrr}1&1&-1&1&0&0\\0&-1&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1\end{array}\right) \; \begin{array}{l}L_2 \leftrightarrow L_3\\ L_3 \leftarrow L_3+L_2\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr}1&1&-1&1&0&0\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&1&1&1\end{array}\right) \; L_1 \leftarrow L_1-L_2+L_3 \; \left(\begin{array}{rrr|rrr}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&1&1&1\end{array}\right)$$

Donc P *est inversible et* $P^{-1} = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

3. *Le faire !*

4. $A^2 = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PB\underbrace{P^{-1}P}_{I_3}BP^{-1} = PB^2P^{-1}$. *On montre ainsi par récurrence que* $A^n = PB^nP^{-1}$.

5. *En appliquant le résultat de la question précédente, on trouve*

$$A^n = \begin{pmatrix}1+2^n-3^n & 1-3^n & 2^n-3^n\\ -2^n+3^n & 3^n & -2^n+3^n\\ -1+3^n & -1+3^n & 3^n\end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1.b. *Une base de* E *est* $\{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}\}$.

Exercice 3

$e^x + x = 1+2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$, *donc* $\frac{1}{e^x+x} = 1-2x+\frac{7}{2}x^2-\frac{37}{6}x^3+o(x^3)$.

$1+\sin x = 1+x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$, *donc* $\ln(1+\sin x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$. *Ainsi :*

$$f(x) = 1-x+3x^2-6x^3+o(x^3).$$

Exercice 4

1. $\pm(3-2i)$
2. $z=-2i$
3. *Les solutions sont* $\{-2i, -1+3i, 2+i\}$.
4. $AC = |z_C - z_A| = \sqrt{13}$, $AC = \sqrt{13}$, *et* $AB = \sqrt{26}$. *Ainsi le triangle* ABC *est rectangle isocèle en* C *(théorème de Pythagore).*