

Médian MTC, Automne 2018

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Aucun document n'est autorisé pour l'épreuve. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : Intégrales généralisées (8 points)

Pour $x \geq 0$, on pose $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

1. Montrer que I est bien définie sur $[0, +\infty[$, et calculer $I(0)$.
2. Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. Calculer I' à l'aide d'une double intégration par parties, et en déduire la valeur de $I(x)$.

Exercice 2 : Séries numériques (8 points)

1. Énoncer et démontrer le critère de d'Alembert.
2. Donner la nature des séries de terme général suivant :

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1} \quad v_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad w_n = \frac{1}{n \cos^2 n} \quad x_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Indication. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $u \mapsto \ln(1 + u)$, et en déduire un équivalent de v_n .

Exercice 3 : Déterminants (4 points)

Calculer sous forme factorisée

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$