Médian MTC, Automne 2019

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.

Exercice 1 : Réduction d'endomorphismes (10 points)

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ soit diagonalisable.

2. Montrer que si f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors f^2 est aussi diagonalisable (on rappelle que $f^2 = f \circ f$).

3. On se propose dans la suite de l'exercice de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse. Pour cela, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$. On note I la matrice identité d'ordre 3.

- **a.** Calculer A^2, puis établir que $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de A.
- **b.** Donner une base (u) de $\ker(g - \mathrm{Id})$.
- **c.** Déterminer $\ker(g + \mathrm{Id})$.
- **d.** En déduire que g n'est pas diagonalisable.

4.
- **a.** Donner une base (v, w) de $\ker(g^2 + \mathrm{Id})$.
- **b.** Justifier que la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- **c.** Donner la matrice de g^2 dans la base $\mathcal{B}$, et conclure.

Exercice 2 : Intégrales généralisées (10 points)

1. Les fonctions f et g considérées dans cette question sont supposées définies, continues, et strictement positives sur $]0, 1]$.

- **a.** Définir la convergence de l'intégrale de f sur $[0, 1]$.
- **b.** On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \varepsilon], 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.
  Montrer que si $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi, et que si $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

2. Démontrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. On note $f(x)$ sa valeur.

3. En utilisant deux intégrations par parties successives, montrer que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{2 \sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

4. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{2 \sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

5. Démontrer que pour tout $x > 0$, $\left| f(x) - \dfrac{\cos x}{x} \right| \leqslant \dfrac{2}{x^2}$. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

6. Calculer la dérivée de f. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = xf(x) - \cos x + 1$.

7. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.