Médian MTC, Automne 2021

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.

Exercice 1 : Intégrales généralisées (10 points)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^n}\,\mathrm{d}t, \qquad J_n = \int_0^{1} \frac{\ln t}{1+t^n}\,\mathrm{d}t, \qquad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

1. Étudier la nature, et calculer la valeur de $A = \displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$.

2. **a.** Montrer que J_n est convergente.

b. Quelle est la nature de K_n ?

c. En déduire la nature de I_n.

On s'intéresse à la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. **a.** Démontrer que $\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in]0,1],\ 0 \leqslant \dfrac{\ln t}{1+t^n} - \ln t \leqslant -t^n \ln t$.

b. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $B = \displaystyle\int_0^1 -t^n \ln t\,\mathrm{d}t$.

c. Déduire des questions précédentes que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = -1$.

4. **a.** On admet que $\forall x \geqslant 1,\ 0 \leqslant \ln x \leqslant x$.
En déduire que : $\forall x \geqslant 1,\ \forall n \geqslant 3,\ 0 \leqslant \dfrac{\ln x}{1+x^n} \leqslant \dfrac{1}{x^{n-1}}$.

b. En déduire que : $\forall n \geqslant 3,\ 0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{1}{n-2}$.

c. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 2 : Séries numériques (10 points)

1. Citer, puis démontrer un des critères de convergence (ou de divergence) contenu dans le chapitre sur les séries numériques.

2. Étudier la nature des séries de terme général :

a. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

b. $b_n = n\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

c. $c_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

d. $d_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$

3. Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$ où $n \geqslant 1$.

a. La série $\sum u_n$ est-elle alternée ?

b. La série est-elle absolument convergente ?

c. La série est-elle convergente ? Est-elle semi-convergente ?