Médian MT3, Automne 2022

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.

Exercice 1 : Intégrales généralisées (6 points)

On définit la fonction $F\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'intervalle de définition I de la fonction F.

2. Montrer que F est décroissante sur I.

3. **a.** Calculer $F(1)$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$F(n) = 2n\big(F(n) - F(n+1)\big)$$

c. En déduire une expression de $F(n+1)$ en fonction de n et de $F(n)$.

d. Calculer $F(2)$.

Exercice 2 : Questions de cours (6 points)

1. Énoncer, puis démontrer un des critères de convergence du chapitre sur les intégrales généralisées.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que $\det A = 7$. Que vaut $\det(2A)$?

3. Soient a et b deux nombres réels, et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$. Calculer $\det A$ sous forme factorisée. À quelle condition la matrice A est-elle inversible ?

4. Étudier la nature de $\sum \dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 3 : Séries numériques (8 points)

Soit $x \in [0,1[$.

1. **a.** Vérifier que pour $n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall t \in [0,x],\ \dfrac{1}{1-t} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \dfrac{t^n}{1-t}$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star,\ -\ln(1-x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

2. **a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$

3. Montrer alors que $\sum \dfrac{x^n}{n}$ converge, et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

4. **a.** Déterminer deux nombres réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.

b. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge, et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$.

c. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)2^{n+1}}$ converge, et donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)2^{n+1}}$.