1. Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' - 4y = 16x^2 - 40x - 12$, en prenant comme condition initiale $y(0) = 0$.

2. Soit (E) : $\sin x \times y' - \cos x \times y = x$.

   (a) Vérifier que la solution générale que l'équation homogène associée est $y_h = k \sin x$, où $k \in \mathbb{R}$. On cherche alors à déterminer k par la méthode de variation de la constante.

   (b) Donner l'équation que vérifie k.

Bonus : Calculer k (on pourra utiliser une intégration par parties).

---

1. $(E_h) : y' - 4y = 0 \iff \frac{y'}{y} = 4$. donc la solution générale est $y_h = ke^{4x}$.
   On cherche une solution particulière y_0 sous la forme $y_0 = ax^2 + bx + c$, alors $y_0' = 2ax + b$.
   $(E) \iff (2ax + b) - 4(ax^2 + bx + x) = 16x^2 - 40x - 12$. Ce qui conduit au système
   $$\left\{\begin{array}{rcl} -4a & = & 16 \\ 2a - 4b & = & -40 \\ b - 4c & = & -12 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -4 \\ b & = & 8 \\ c & = & 5 \end{array}\right.$$
   Finalement la solution est $y = ke^{4x} - 4x^2 + 8x + 5$. On cherche alors k tel que $y(0) = 0 = k + 5$, ce qui donne $k = -5$. D'où
   $$\boxed{y = -5e^{4x} - 4x^2 + 8x + 5}$$

2. (a) Soit $y_h = k \sin x$, $y_h' = k \cos x$. Donc $\sin x \times y' - \cos x \times y = k \sin x \cos x - k \sin x \cos x = 0$: y_h est bien la solution générale que l'équation homogène associée.

   (b) On cherche y_0 sous la forme $k(x) \sin x$: $y_0' = k' \sin x + k \cos x$.
   $(E) \iff \sin x(k' \sin x + k \cos x) - \cos x(k \sin x) = x$. Ce qui donne $\boxed{k' = \dfrac{x}{\sin^2 x}}$.

Bonus On doit intégrer $\frac{x}{\sin^2 x}$, pour cela on pose
$u = x \quad \Rightarrow u' = 1$
$v' = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow v = -\frac{\cos x}{\sin x}$
D'où $k = -\dfrac{x \cos x}{\sin x} + \displaystyle\int \dfrac{\cos x}{\sin x} dx = -\dfrac{x \cos x}{\sin x} + \ln|\sin x|$. Finalement,

$$\boxed{y_0 = -x \cos x + \sin x \ln|\sin x|}$$

La solution générale de (E) est :

$$\boxed{y = -x \cos x + \sin x\big(k + \ln|\sin x|\big), \quad k \in \mathbb{R}}$$