Étude d'un paradoxe

Ce devoir maison est à rendre en T.D. la semaine du 10 mai. Le travail doit être fait par groupe de 4 étudiants d'un même groupe. Ce devoir est obligatoire, et représentera 20% de la note de contrôle continu.

Introduction

Description du jeu A :
On dispose d'une pièce truquée. Lorsqu'on la lance, la probabilité d'obtenir "pile" est $p_1 = 0,495$ et la probabilité d'obtenir "face" est $1 - p_1$. Le joueur va lancer cette pièce un grand nombre de fois. Chaque fois qu'il obtient "pile" il gagne 1 euro, et il perd 1 euro chaque fois qu'il obtient "face".

Description du jeu B :
On dispose désormais de deux pièces truquées. Avec la première pièce, on obtient "pile" avec une probabilité $p_2 = 0,095$. Avec la seconde, on obtient "pile" avec une probabilité $p_3 = 0,745$. La pièce avec laquelle va jouer le joueur dépend de sa fortune. Si son capital est un multiple de 3, il joue avec la première pièce, sinon il joue avec la deuxième. Là encore, il obtient 1 euro lorsqu'il fait "pile", et il perd 1 euro lorsqu'il fait "face". Sa fortune évoluant au cours du jeu, il jouera régulièrement avec chacune des deux pièces.

Des simulations numériques de ces jeux sont demandées. Pour être significatives, les parties doivent durer au moins 10000 tours. Il faudra donc les effectuer avec un logiciel informatique quelconque.

1 Étude du jeu A

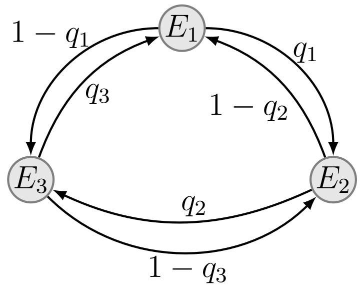
On note S_n la fortune du joueur après le n-ième lancer. On suppose que $S_0 = 0$, *i.e.* la fortune du joueur est initialement égale à 0. On note X_n le gain obtenu par le joueur au n-ième lancer. Les variables aléatoires X_n sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

1. Quelle est la loi des variables X_n ? Pour $n \geq 1$, quelle est la loi de la variable S_n ?
2. Déterminer les valeurs des espérances $\mathbf{E}[X_n]$ et $\mathbf{E}[S_n]$.
3. Décrire à l'aide de la loi forte des grands nombres l'évolution la plus probable de ce jeu ?

4. Simuler ce jeu, représenter graphiquement l'évolution des gains et comparer ces résultats avec les résultats théoriques.

2 Chaînes de Markov

On appelle chaîne de Markov un ensemble d'états liés par des probabilités de transition. Le principe est que l'on peut se déplacer sur la chaîne d'un état à l'autre. Ces déplacements sont aléatoires et décrits par des probabilités de transition. Une telle chaîne se représente de la manière suivante :



Notons a_{ij} la probabilité de passer de l'état E_i à l'état E_j. On appelle matrice de transition de la chaîne de Markov la matrice $(a_{ij})_{i,j\leq N}$. Sur notre exemple ci-dessus, nous avons $a_{12} = q_1$, $a_{21} = 1 - q_2$ et $a_{11} = 0$, et la matrice de transition de cette chaîne de Markov est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & 1-q_1 \\ 1-q_2 & 0 & q_2 \\ q_3 & 1-q_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous étudions dans cette partie certaines propriétés de la chaîne de Markov décrite ci-dessus avec $0 < q_i < 1$ pour $i = 1, 2, 3$.

1. Quelle est la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 en deux déplacements ?
2. Montrer que la matrice M^2 est la matrice des probabilités de transition en deux étapes, *i.e.* le coefficient b_{ij} de M^2 représente la probabilité de passer de l'état i à l'état j en deux étapes.
   Généraliser ce résultat.
3. Montrer que 1 est une valeur propre de M.

   On admettra dans la suite que M admet deux autres valeurs propres λ_1 et λ_2 de modules strictement inférieurs à 1 et qu'elle est diagonalisable :

$$\exists P \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C}), \quad M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

4. En déduire que la suite de matrices $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice limite M^∞.
   Remarque : il est possible de démontrer que toutes les lignes de cette matrice M^∞ sont identiques. Le coefficient de la k-ième colonne représente alors la fréquence de passage dans l'état k.
5. Chercher dans des livres le lemme de Cesàro et l'appliquer à la suite de matrices $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3 Étude du jeu B

On reprend les mêmes notations que dans la partie 1 (mais les variables X_n ne sont plus indépendantes et de même loi). Pour étudier le jeu B, on considérera une chaîne de Markov à trois états 0, 1, et 2. On dira que le joueur est dans l'état E_0 si sa fortune est un multiple de 3, dans l'état E_1 si elle est de la forme $s = 3k + 1$, et dans l'état E_2 si elle est de la forme $s = 3k + 2$. Sa fortune évoluant au cours du jeu, son état évolue également.

On introduit la variable aléatoire C_n à valeur dans $\{0, 1, 2\}$ qui donne l'état où se trouve le joueur après le n-ième lancer. La fortune du joueur étant initialement nulle, $C_0 = 0$.

Jusqu'à la question 7 incluse, les résultats seront exprimés de manière formelle, en fonction des paramètres p_2 et p_3 définis dans l'introduction.

1. Représenter la chaîne de Markov en indiquant les probabilités de transition.
2. Écrire la matrice de transition M associée à cette chaîne.
3. Donner $\mathbf{P}(C_1 = 0)$, $\mathbf{P}(C_1 = 1)$ et $\mathbf{P}(C_1 = 2)$.
4. Déterminer $g_0 = \mathbf{E}[X_2|C_1 = 0]$ (respectivement $g_1 = \mathbf{E}[X_2|C_1 = 1]$ et $g_2 = \mathbf{E}[X_2|C_1 = 2]$) l'espérance conditionnelle du gain X_2 sachant que le joueur est dans l'état 0 (respectivement dans les états 1 et 2).
5. Déduire des deux questions précédentes la valeur de $\mathbf{E}[X_2]$.
6. Généralisation : montrer que pour tout n, l'espérance $\mathbf{E}[X_n]$ est le premier coefficient du vecteur $M^{n-1} \cdot G$, où G est le vecteur $\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$.
7. En déduire l'expression de $\mathbf{E}[S_n]$.

À partir de cette question, les résultats seront donnés sous forme numérique.

8. Déterminer (à l'aide d'un logiciel quelconque) la limite de la suite $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9. En déduire le gain moyen du joueur $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]$.
10. Comment va évoluer le jeu ?
11. Simuler ce jeu, représenter graphiquement l'évolution des gains, et comparer ces résultats avec les résultats théoriques.

4 Combinaison des deux jeux

On considére désormais le jeu suivant : avant chaque lancer, le joueur tire au sort le jeu auquel il va jouer. Il jouera au jeu A avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et au jeu B avec une probabilité $\frac{1}{2}$.
On peut modéliser ce jeu avec la chaîne de Markov du jeu B. Seules les probabilités de transition sont modifiées.

1. Représenter la chaîne de Markov associée à ce jeu.
2. Refaire les calculs numériques de la partie précédente.
3. Quel est le gain moyen de ce jeu ? Pourquoi ce résultat est-il paradoxal ?
4. Simuler ce jeu, représenter graphiquement l'évolution des gains et comparer ces résultats avec les résultats théoriques.