1. On considère X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. Calculer la valeur x telle que $\mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{2}$.
2. Soient $X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$ deux v.a. indépendantes, et $Y = \min(X_1, X_2)$. Montrer que $Y \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
3. Trois clients A, B, et C arrivent en même temps ($t = 0$) à un guichet de poste où deux guichets sont ouverts, qu'occupent A et B tout de suite. C remplace le premier des deux qui a terminé. On admet que les temps de service X, Y, et Z de ces trois clients sont des v.a.i.i.d. de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Quelle est la loi du temps d'attente de C ?

---

1. $\mathbb{P}(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$. On cherche donc x tel que :
$$1 - e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\lambda x = -\ln 2 \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$
2. Soit $Y = \min(X_1, X_2)$:
$\mathbb{P}(Y \geq x) = \mathbb{P}(X_1 \geq x, X_2 \geq x) = \mathbb{P}(X_1 \geq x)\mathbb{P}(X_2 \geq x) = e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}$. On voit donc que $Y \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
3. Le temps d'attente de C au bureau de poste est le temps d'attente avant d'être servi, plus le temps de service. Ainsi $C = \min(X, Y) + Z \sim \mathcal{E}(2\lambda) + \mathcal{E}(\lambda)$. La densité s'écrit :
$$f_C(x) = \int_{t=0}^{t=x} 2\lambda e^{-2\lambda t} \lambda e^{-\lambda(x-t)}\, dt = 2\lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda t}\, dt = 2\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x}).$$