SQ20 examen final P 05

Sont autorisées les tables numériques, une feuille de notes recto et une calculatrice
Rédiger les trois premiers exercice sur la même feuille et le quatrième à part

Exercice 1

Un examen comporte une série de 60 questions à choix multiples : pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est bonne. Chaque bonne réponse rapporte 1 point et il faut obtenir 30 points pour réussir l'examen.

1) L'élève A n'a rien préparé et répond au hasard à chaque question.
   a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X = nombre de points obtenus par A ?
   b) Par quelle variable X' peut-on approcher X ?
   c) Donner la probabilité que A réussisse son examen.
2) L'élève B connaît 24 bonnes réponses et répond au hasard aux autres.
Calculer la probabilité que B réussisse son examen.

Exercice 2

Soit la fonction de R vers R définie par : f(x) = 0 si x < 0 et f(x) = k x $e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ si x>0

Les constantes a et k sont positives.
1) Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X si et seulement si $k = \frac{1}{a^2}$
2) Calculer alors la fonction de répartition F de X.
3) Calculer l'espérance de X. On pourra utiliser le résultat suivant : $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$
4) X représente la durée de vie en semaine d'un animal de laboratoire. On suppose que a = 30. Calculer les probabilités qu'un animal
   - vive moins de 20 semaines
   - vive plus de 52 semaines

Exercice 3

Une municipalité désire faire une campagne de promotion pour son centre ville où sont situés 600 commerces. Elle commence par faire un sondage auprès d'un échantillon de 100 commerçants. 50 répondent qu'ils accepteraient de participer à cette opération.

1) Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion p de commerçants intéressés.
2) Déterminer la taille n de l'échantillon nécessaire pour connaître le nombre de commerçants intéressés à 30 unités près.

Exercice à rendre sur une feuille séparée
<u>Exercice 4</u>

On a étudié la consommation d'essence, en litres et sur 100 km, de voitures de même marque et de même cylindrée, choisies au hasard à la sortie de deux chaînes de fabrication situées dans deux centres de production A et B. Ces voitures sont conduites par le même conducteur sur le même circuit. Les résultats sont:

Consommation	8	9	10	11	12
nb de voitures de A	1	3	4	5	3

Consommation	8	9	10	11	12
nb de voitures de B	0	4	6	4	2

On suppose que la consommation, pour les deux chaînes de fabrication, suit une loi normale de même écart type σ.

a) Calculer les moyennes de consommation pour ces deux centres.

b) Déterminer une estimation de σ à partir des données ci-dessus.

c) L'écart de moyenne est-il dû à des fluctuations d'échantillonnage au risque de 1% ?

FINAL SQ20 P05.

Exercice 1 X = nombre de bonnes réponses de A. $X \sim \mathcal{B}(n=60, p=\frac{1}{4})$

1a) $X(\Omega) = [\![0, 60]\!]$ $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ $q = 1-p$

b) $\frac{1}{10} < p < \frac{9}{10}$ $np = 15$ Th. central limite on approche X par $X' \sim \mathcal{N}(m = np = 15, \sigma = \sqrt{npq})$

$\sigma^2 = np(1-p) = \frac{45}{4}$

c) $P(A \text{ réussisse}) = P(X \geq 30) = P(X' \geq 29,5)$ (correction de continuité).

$= P\left(\frac{X'-m}{\sigma} \geq \frac{29,5-15}{\sigma} = \frac{14,5 \times 2}{3\sqrt{5}}\right) = P(\mathcal{N}(0,1) \geq 4,323)$

$= 1 - P(\mathcal{N}(0,1) < 4,323) \simeq \boxed{9.10^{-6}}$

2) Y = nombre de bonnes réponses de B. $Y = 24 + Z$, $Z \sim \mathcal{B}(36, \frac{1}{4})$

$P(B \text{ réussisse}) = P(Y \geq 30) = P(Z \geq 6) = P(Z' \geq 5,5)$

on approche Z par $Z' \sim \mathcal{N}(36 \times \frac{1}{4} = 9, \sigma = \frac{3\sqrt{3}}{2})$

$= P\left(\mathcal{N}(0,1) \geq \frac{5,5-9}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \simeq -1,347\right) = P(\mathcal{N}(0,1) < 1,347)$

$= 0,9099 + 0,7.16.10^{-4} \simeq \boxed{0,91}$

Table $\mathcal{N}(0,1)$: $1,34 \to 0,9099$
$1,35 \to 0,91115$

Exercice 2

1) f est une densité de probabilité si $\begin{cases} \forall x \quad f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \end{cases}$

$k > 0$ $\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \left[-a^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}\right]_0^{+\infty} = a^2$ donc $ka^2 = 1$ $k = \frac{1}{a^2}$.

2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$ si $x \leq 0$

si $x > 0$ $F(x) = \int_0^x \frac{1}{a^2} t e^{-\frac{t^2}{2a^2}} dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$

3) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ I.P.P $\begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & v = -e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \end{cases}$

$= \left[-x e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ changement $x = at$ $dx = a\,dt$

$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} a\,dt = a\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

4) $P(\text{animal vive moins de 20 semaines}) = P(X \leq 20) = F(20) = 1 - e^{-\frac{2}{9}} \simeq 0,2$

$P(\text{animal vive plus de 52 semaines}) = P(X > 52) = 1 - F(52) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{52}{30}\right)^2} \simeq 0,22$

Exercice 3 $n = 100$

$N = 600$ p = proportion de commerçants intéressés.

1) estimateur de p : F fréquence.

taux de sondage $\frac{n}{N} > \frac{1}{10}$. Variable de confiance $\frac{F-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

niveau de confiance $0{,}95$ $\quad \frac{p(1-p)}{n} \simeq \frac{1}{4n}$

intervalle de confiance de p

$$F - \frac{1{,}96}{\sqrt{4n}}\sqrt{\frac{5}{6}} < p < F + \frac{1{,}96}{2\sqrt{n}}\sqrt{\frac{5}{6}} = F + 0{,}08946$$

ce qui donne pour le nombre total de commerçants intéressés l'intervalle

$]300 - 53{,}7 \,;\, 300 + 53{,}7[\;:\; [247 \,;\, 353]$

2) on veut un intervalle $[a\ b]$ tel que $b - a \leq 30$ centré en 300

$$600 \times \frac{1{,}96}{2\sqrt{n}}\sqrt{1 - \frac{n}{600}} \leq 15 \quad n \geq \frac{1}{\frac{1}{(39{,}2)^2} + \frac{1}{600}} \simeq 431{,}5 \quad \underline{n = 432}$$

Exercice 4 $X_A \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma)$ $\quad X_B \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma)$

$n_1 = n_2 = 16$

a) $\overline{x}_A = \frac{\sum x_k}{n} = 10{,}375$ $\quad \overline{x}_B = 10{,}25$

b) Estimateur de σ^2 : $S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_A^2 + (n_2 - 1)S_B^2}{n_1 + n_2 - 2}$

$(n_1 - 1)S_A^2 = \sum_1^{16}(x_k - \overline{x}_A)^2 = 21{,}75$ $\quad (n_2 - 1)S_B^2 = 15$ $\quad s^2 = 1{,}225$

$\sigma \simeq 1{,}107$

c) H_0 : "$m_1 = m_2$" contre H_1 : "$m_1 \neq m_2$"

Sous l'hypothèse H_0, $Y = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim T_{n_1 + n_2 - 2} = T_{30}$

risque 1% : $P(-2{,}75 < T_{30} < 2{,}75) = 0{,}99$

Domaine d'acceptation de H_0 : $|\overline{x}_A - \overline{x}_B| \leq 2{,}75\sqrt{1{,}225\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)} = 1{,}076$

observation : $\overline{x}_A - \overline{x}_B = 0{,}125 < 1{,}076$

on accepte l'hypothèse que l'écart des moyennes observées est dû à des fluctuations d'échantillonnage.