utbm université de technologie Belfort-Montbéliard

SQ 20 — Médian Printemps 04

Lundi 26 avril 2004

Les deux parties doivent être rendues sur des copies séparées. Rendre deux copies, même vides.

I. Première partie (3,5 + 6 + 2,5 points)

1°) Une salle de contrôle est munie d'une serrure à code de 4 chiffres (de 0 à 9). Si les quatre chiffres saisis au clavier sont corrects (et dans le bon ordre) la porte s'ouvre. S'ils sont tous faux (ou tous mal placés) une alarme se déclenche. Dans les autres cas, il ne se passe rien.

a) Définir l'ensemble des possibilités Ω et calculer Card(Ω).

b) Si on saisit un code au hasard, déterminer les probabilités des événements « la porte s'ouvre » et « l'alarme se déclenche ».

c) Déterminer le nombre de codes correspondant aux situations suivantes :

- On sait qu'il y a au moins un 2 et pas de 0.
- On sait qu'il y a un chiffre triple
- Le 7 ne figure qu'une seule fois
- Toutes les conditions précédentes sont réunies.

Déterminer les probabilités d'ouverture de la porte dans chacun des cas.

d) Le code d'accès est 1234. Un employé connaît les quatre chiffres, mais n'en connaît pas l'ordre. Il compose un code avec ces quatre chiffres. Quelle est la probabilité que l'alarme se déclenche ?

2°) Un composant est protégé par deux fusibles, le second se mettant en service quand le premier a fondu. A chaque mise en tension, le fusible en service a une probabilité 0,01 de fondre. Le composant cesse de fonctionner quand le second fusible a fondu, et il n'y a pas d'usure sur les fusibles.

a) On note X_1 le nombre de mises en tension avant la fusion du premier fusible. Déterminer la loi de X_1, son espérance de X_1 et écrire $p(X_1 = n)$ (probabilité de fonte à la $n^{\text{ème}}$ mise en tension) pour des valeurs convenables de n. On définit de même la variable X_2 pour le second fusible.

b) Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(X_1 \leq n) < 0{,}8$?

c) On note Y_2 le nombre de mises en tension avant la fonte du second fusible. Déterminer son espérance et, pour n convenable, calculer $p(Y_2 = n)$.

d) Soit n entier non nul et f_n la fonction définie sur]0, +1[par $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \dfrac{1-x^n}{1-x}$. Calculer de deux manières la dérivée f_n' de f_n.

e) En déduire la probabilité que le composant fonctionne encore après 200 mises en tension.

3°) Les composants sont livrés en grande quantité dans des caisses dont la masse M (en kg) suit une loi normale d'espérance 100 et de variance $\sigma^2 = 25$.

a) Une caisse est examinée (pour vérification), si sa masse *n'est pas* dans l'intervalle [90, +105]. Une caisse étant pris au hasard, quelle est la probabilité qu'elle soit examinée ?

b) On souhaite n'examiner que 5% des caisses. Déterminer un intervalle $I_\alpha =]100 - \alpha, 100 + \alpha[$ dont la probabilité est 0,95 ? En déduire pour quelles masses les caisses sont examinées.

c) Un transporteur est chargé d'acheminer 144 caisses dans un avion cargo pouvant accueillir une charge de 14,55 tonnes. Quelle est la probabilité que l'avion soit en surcharge.

II. Seconde partie (4 (+2) + 3 + 3 points)

1°) Un dispositif de sécurité a une durée de vie T_0, exprimée en années, qui suit une loi exponentielle $E(\lambda)$ de paramètre $\lambda = 0{,}1$. On note A l'événement « le dispositif tombe en panne au cours de la première année de fonctionnement »

a) Écrire la densité et la fonction de répartition de T_0. Calculer $p(T_0 < 10)$ et montrer que $p(A) \approx 0{,}1$.

b) Les dispositifs sont livrés par boîtes de 40 unités. On note N le nombre de dispositifs qui réalisent l'événement A. Déterminer la loi de N, son espérance et sa variance.

Calculer la probabilité de l'événement $(N < 5)$.

Pour quelles valeurs de k a-t-on $p(N \leq k) > 0{,}95$?

c) Les dispositifs sont classés en trois catégories :

Les fragiles (ceux qui tombent en panne au cours de la première année), les solides (ceux qui fonctionnent encore après 10 ans) et les normaux (le reste).Un dispositif est tiré au hasard dans une grande production. Calculer les probabilités des événements : F : « il est fragile », S : « il est solide ».

Un dispositif ayant fonctionné sans problème pendant 3 ans, quelle est la probabilité de l'événement « il est solide » ?

d) Pour faire un montage, on prélève 4 dispositifs dans une boîte qui contient 3 fragiles, 16 normaux et 11 solides. On s'intéresse au nombre N_1 de dispositifs normaux. Déterminer la loi de N_1, son espérance et sa variance. Représenter graphiquement sa distribution.

e) (*Question supplémentaire, hors barème, sur 2 points*). Pour un système de sécurité à durée de vie assez longue, on a absolument besoin d'avoir en stock 10 dispositifs solides. L'avenir du fabricant n'étant pas assuré, combien doit-on en commander pour que la probabilité d'avoir 10 dispositifs solides soit supérieure à 0,99.

Cette question est plus longue et plus difficile. On pourra faire une approximation normale.

2°) Pour pallier les défaillances, on décide d'employer deux dispositifs identiques à ceux de la question précédente, et on a le choix entre deux montages : parallèle et cascade.

a) On considère le montage parallèle. Le système fonctionne tant qu'au moins un dispositif est en état de marche. On note T_1 le temps (en années) de fonctionnement du montage.

Pour $t \in \mathbb{R}_+$, calculer $p(T_1 < t)$.

b) On s'intéresse au montage en cascade. Le second dispositif se met en service quand le premier tombe en panne. On en note T_2 le temps de fonctionnement. Déterminer la densité de T_2, puis la probabilité $p(T_2 < t)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}_+$.

c) Pour un fonctionnement prévu de 10 ans, quel est le plus intéressant ?

3°) Pour tester la longévité d'un appareil, on dispose de 100 montages avec des dispositifs identiques aux précédents et montés en cascade. On soumet ces montages à un vieillissement artificiel qui simule une période de fonctionnement de 20 ans. A la fin de l'expérience on compte le nombre de dispositifs en panne et on a le tableau suivant :

Nombre de dispositifs en panne	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de montages	14	26	27	18	9	4	2

a) Calculer la moyenne et la variance de cette série.

b) Déterminer une loi de probabilité (usuelle) qui s'ajuste à ces données, et vérifier que les résultats sont convenables.

Par égalité, chacun comprend qu'il ne vaut pas moins que son voisin , mais que son voisin est loin de le valoir.

George MIKES (Grande-Bretagne 1912) *Comment peut-on être anglais ?*